Chapitre 0

Principes de rédaction

Plan du chapitre

Même si on est convaincu qu'un énoncé mathématique est vrai, il peut arriver qu'au moment de passer à la preuve, on ne sache pas par où commencer. Le point de départ d'une bonne démonstration est avant tout une bonne rédaction. Même si votre raisonnement vous semble clair "dans votre tête", c'est une autre affaire de le rendre compréhensible pour le plus grand nombre et éviter toute confusion possible. C'est l'objectif de ce chapitre, qui constituera une référence tout au long de l'année.
La rédaction ne s'improvise pas, car elle mêle des automatismes qui s'acquièrent par la pratique et des définitions et théorèmes qu'il faut savoir invoquer au bon moment et précisément. La critique est aisée et l'art est difficile, mais c'est aussi un plaisir d'apprendre à rédiger.

1 Axiomes, définitions, théorèmes, etc.

- **Axiome** : on appelle *axiome* un énoncé mathématique qu'on suppose vrai, sans apporter de justification. L'existence de l'ensemble vide est un exemple d'axiome. Les axiomes forment le socle d'une construction : chaque assertion qu'on arrive à démontrer à partir des axiomes permet d'ajouter une pierre à l'édifice. Ces assertions peuvent ensuite être utilisées pour en démontrer de nouvelles. Cet empilement d'axiomes, de démonstrations et d'assertions est ce qu'on appelle une *théorie mathématique*.

  Nous aurons très peu l'occasion de rencontrer les axiomes classiques sur lesquels se fondent les mathématiques modernes. Nous nous efforcerons de montrer (ou de donner une idée de preuve) de la majorité des résultats, mais pas tous. Nous *admettrons* que certaines propositions sont vraies, comme si elles étaient des axiomes. En particulier, nous admettrons l'existence des nombres réels, alors que, loin d'accepter cela comme un état de fait, les mathématiciens peuvent construire rigoureusement l'ensemble $\mathbb{R}$ à partir d'axiomes plus élémentaires.

- **Définition** : on appelle *définition* toute manière d'associer un nom précis à un objet mathématique qui vérifie une propriété donnée. Le principal intérêt d'une définition est de gagner du temps. Plutôt que de dire "n est un nombre entier supérieur ou égal à 2 divisible uniquement par 1 et par lui-même", on peut dire "n est premier".

  Une définition n'est donc pas un résultat mathématique : elle n'appelle à aucune démonstration. Par contre il est indispensable de les connaitre précisément pour "parler la même langue" que les autres mathématiciens. En voici un exemple :

Définition – Fonction croissante

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est croissante (sur I) si :

$$\forall x, y \in I \qquad (x < y \implies f(x) \leq f(y))$$

- **Théorème** : on appelle *théorème* toute proposition d'une théorie qu'on a pu démontrer à partir des axiomes. Un théorème est donc vrai, là où une proposition ne l'est pas forcément (ou reste à démontrer). D'autres termes peuvent être utilisés pour désigner certaines catégories de théorèmes :
  - **Lemme** : on appelle *lemme* un théorème préliminaire, qui permet simplifier la démonstration d'un autre théorème. Certains lemmes ne constituent pas un résultat essentiel à retenir.
  - **Corollaire** : on appelle *corollaire* un théorème dont la démonstration découle presque trivialement d'un théorème précédent.
  - **Caractérisation** : on appelle *caractérisation* un théorème qui donne une équivalence entre une définition et une assertion[1]. Voici un exemple :

Théorème – Caractérisation d'une fonction croissante

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction **dérivable**. Alors f est croissante (sur I) si et seulement si f' est positive ou nulle (sur I).

On notera que ce dernier théorème fournit une caractérisation de la croissance d'une fonction, mais uniquement sous *l'hypothèse* que cette fonction soit dérivable.

2 Bien doser la justification

Lors d'une démonstration, votre objectif est de *convaincre* votre interlocuteur qu'une assertion est vraie. Vous devez donc faire en sorte que votre preuve soit la plus claire possible, et assortie des arguments les plus pertinents. En particulier, il faut éviter deux extrêmes : justifier trop, ou justifier trop peu. Voici un exemple :

Exemple 1. On note f la fonction définie par $f(x) = 2x^3 - x^2 + 1$. Montrer qu'il existe un réel x tel que $f(x) = 0$.

Une justification incomplète

On remarque que $f(-1) = -2$ et $f(1) = 2$. Donc il existe un réel x dans $\big[-1, 1\big]$ tel que $f(x) = 0$.

Une justification correcte

Comme f est polynômiale, elle est **continue**. De plus,

$$f(-1) = -2 \leq 0$$
$$f(1) = 2 \geq 0$$

Comme $\big[-1, 1\big]$ est un **intervalle**, de par le **théorème des valeurs intermédiaires**, on en déduit qu'il existe $x \in \big[-1, 1\big]$ qui vérifie $f(x) = 0$.

Une justification trop détaillée

Comme les fonctions cube, carrée et constante sont des polynômes, f est un polynôme par somme. Ainsi, f est continue. De plus,

$$\begin{aligned} f(-1) &= 2 \times (-1)^3 - (-1)^2 + 1 \\ &= (\ldots) = -2 \leq 0 \end{aligned}$$

$$f(1) = (\ldots) = 2 \geq 0$$

De plus $\big[-1, 1\big]$ est un intervalle car -1 et 1 sont des réels. Donc par le théorème des valeurs intermédiaires, qui stipule que (...), on en déduit qu'il existe $x \in \big[-1, 1\big]$ tel que $f(x) = 0$.

1. Plus généralement, on appelle parfois caractérisation un théorème qui démontre l'équivalence entre deux ou plusieurs assertions.

Comment trouver le degré de justification correct ? Jusqu'à quel point doit-on détailler une preuve ? Il n'y a pas de réponse universelle ! Contrairement aux mathématiques, la rédaction n'est pas une science exacte. Il faut donc trouver un juste milieu, qui va dépendre du contexte et de la personne qui va vous lire. Au fur et à mesure de l'année, vous allez acquérir les bons réflexes et le niveau de rigueur attendu en CPGE. Voici quelques indications :

- Les premières questions d'un devoir et/ou d'un exercice sont très importantes. Si vous mettez suffisamment l'accent sur le détail au début, on est plus disposé à vous pardonner un manque de rigueur plus tard.
- En aucun cas il est demandé de réécrire le théorème complet avant de l'appliquer. Par contre, si un théorème nécessite des hypothèses pour être appliqué, il faut les vérifier concienciEusement, au moins la première fois qu'on se sert de ce théorème. Pour les fois suivantes, on peut être plus expéditif (sauf si la vérification d'une de ces hypothèses est plus complexe et nécessite plus de détail).
- Certains théorèmes ont un nom. Lorsqu'un tel théorème est invoqué, il faut a minima donner son nom. Pour les théorèmes sans nom, on peut se contenter de vérifier les éventuelles hypothèses, et on comprendra par le contexte quel théorème vous avez utilisé (par exemple on peut se contenter d'écrire "f est dérivable donc f est continue").

3 Introduire les variables ou objets utilisés

Une règle d'or de rédaction en mathématiques, c'est que TOUT OBJET DONT ON PARLE DOIT AVOIR ÉTÉ INTRODUIT. En français, si vous dites : "Elle les lui a donnés hier" sans avoir précisé auparavant qui sont "elle", "les" et "lui", personne ne comprendra. En maths c'est pareil, mettez-vous à la place de vos interlocuteurs et présentez tout ce dont vous parlez.

1. **"Constante" universelle** : de nombreux objets mathématiques ont une notation spécifique et universelle pour les désigner. Les symboles "3", "π", "cos" ou encore "$\mathbb{R}$" désignent *un seul et unique objet* (d'où l'appellation "constante"). Ces objets ont un sens universel et il n'est pas nécessaire de les introduire.
2. **"Constante" introduite** : l'énoncé (mais aussi vous-même) peut introduire une notation pour représenter une quantité ou une expression donnée. Par exemple :

$$\text{On pose } K = \frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{2}$$

$$\text{Soit } f \text{ la fonction } x \mapsto \sqrt{x}$$

$$\text{On note } P \text{ l'ensemble des nombres premiers}$$

   L'intérêt principal est de gagner du temps car on peut réutiliser les lettres K, f et P pour désigner ces objets.
3. **Variable** : une variable représente un élément quelconque de l'ensemble auquel elle appartient. Contrairement aux "constantes", elle n'a pas de valeur définie, car justement on s'en sert pour représenter toutes les valeurs de l'ensemble. Par exemple :

On note f la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$	$\}$ variable x de l'ensemble $\mathbb{R}_+$
On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \dfrac{1}{n}$	$\}$ variable n de l'ensemble $\mathbb{N}^*$
Soit $x \in E$	$\}$ variable x de l'ensemble E

4. **Variable muette** : certaines expressions mathématiques introduisent automatiquement des variables "fictives" : ces variables ne sont pas nécessaires en soi mais permettent de raccourcir l'écriture de l'expression.

Voici une liste des cas les plus fréquents en MPSI :

Expression	**Var. muette**	**Expression sans la variable muette**
La fonction $x \mapsto e^x$	$x \in \mathbb{R}$	La fonction exponentielle
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = n^2$	$n \in \mathbb{N}$	La suite qui à chaque entier associe son carré
$\displaystyle\int_0^1 \cos(x)dx$	$x \in [0,1]$	L'intégrale de la fonction sinus sur $[0,1]$
$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$	x	La limite de la fonction exponentielle en $-\infty$
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$	$k \in [\![1,n]\!]$	$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$
$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad \ln y = x$	$x, y \in \mathbb{R}$	Pour tout réel, il existe un second réel tel que le logarithme népérien du second réel soit égal au premier réel
$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 1\}$	$x \in \mathbb{R}$	L'ensemble des réels dont le carré est supérieur à 1

Il n'est pas nécessaire d'introduire les variables muettes, le formalisme des expressions est suffisant. Du fait qu'une variable muette est "fictive" et auto-introduite, on peut choisir la représenter par le symbole qu'on souhaite sans changer le sens ou la valeur de l'expression :

$$\int_0^1 \cos(x)dx = \int_0^1 \cos(u)du = \int_0^1 \cos(\heartsuit)d\heartsuit$$

Certaines expressions peuvent mélanger des variables muettes et des variables non-muettes : par exemple dans $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$, le k est muet mais le n doit avoir été introduit précédemment pour que cela ait un sens.

Les variables muettes ont une "portée" limitée : par exemple dans une intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ldots\ldots dx$, le x n'existe que dans l'expression à l'intérieur l'intégrale. En dehors, la lettre x est retournée au néant... Mais cela signifie qu'on peut la réutiliser sans confusion possible en écrivant ensuite "$x \mapsto \sqrt{x}$" ou encore "Soit $x \in \mathbb{R}$". Cet exemple est assez éclairant :

$$\text{Montrons que : } \underbrace{\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R}}_{\text{ce } x \text{ et ce } y \text{ sont muets !!}} \quad \underbrace{P(x,y)}_{\text{portée de } x \text{ et } y}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $y = \ldots \in \mathbb{R}$. $\Big\}$ Introduction indispensable !

Remarque. Les variables non-muettes ont une portée beaucoup plus globale, en général jusqu'à la fin du raisonnement ou de la question, voire plus. C'est le cas de x et de y ci-dessus une fois qu'ils ont été introduits par les mots "Soit" ou "On pose" (à la différence des quantificateurs qui "mutisent" les variables).

Remarque. Lorsque vous introduisez une variable ou une "constante", il faut s'assurer que le symbole utilisé ne soit pas déjà employé pour désigner un autre objet. On ne peut donc pas écrire "Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculons $\displaystyle\int_0^x \cos(x)dx$" car il y a une confusion entre le x global introduit par "Soit" et le x muet de l'intégrale.

Remarque. Enfin, un énoncé peut tout à fait introduire des notations spécifiques, différentes de celles dont vous seriez habitué. Dans tous les cas, vous devez vous y conformer et respecter cette notation (sauf pour les variables muettes). Il y a sûrement une bonne raison qui ne se voit pas de prime abord.

4 Montrer l'unicité d'un objet vérifiant une propriété

Si on considère l'assertion "Il **existe** un **unique** élément de E qui vérifie P", il faut bien comprendre que l'existence d'un élément qui vérifie P et l'unicité d'un tel élément sont deux notions radicalement différentes et indépendantes.

Existence	**Unicité**	**Existence et unicité**
Il y a **AU MOINS UN** élément de E qui vérifie P.	Il y a $\boxed{\textbf{AU PLUS UN}}$ élément de E qui vérifie P (ou bien 0 élément, ou bien 1 élément)	Il y a **EXACTEMENT UN** élément de E qui vérifie P.
$\exists x \in E \qquad P(x)$	$\forall x, x' \in E \qquad \big(P(x) \text{ et } P(x')\big) \implies x = x'$	$\exists! x \in E \qquad P(x)$

Pour montrer l'unicité, une façon de faire est donc de considérer x et x' deux éléments quelconques de E qui vérifient P et ensuite de montrer qu'ils désignent, en fait, le même élément. C'est cela, l'unicité[2]. On peut donc déduire la méthode suivante :

Méthode – Preuve de l'unicité d'un objet

Pour montrer qu'un ensemble E contient **AU PLUS UN** élément vérifie une propriété P, on peut écrire :

Soit $x, x' \in E$.

Supposons que $P(x)$ et $P(x')$.

Montrons que $x = x'$. } Facultatif en général

⋮

⋮ } Preuve que $x = x'$

Cette méthode est peu utile en début d'année, mais elle devient cruciale ensuite !

Attention, cette méthode permet de prouver l'unicité d'un élément de E qui vérifie P, mais elle ne donne en aucun cas l'existence d'un tel élément. "Au plus un" ne signifie pas "exactement un". Si vous cherchez à montrer qu'il existe un unique élément de E vérifiant P, on peut montrer l'existence d'une part et l'unicité d'autre part (dans l'ordre que vous voulez).

Exemple. Montrer l'unicité d'un entier naturel n tel que $n^2 = 3$. *(on demande l'unicité, pas l'existence !)*

L'exemple ci-dessus peut sembler saugrenu car un tel entier n n'existe pas ! En effet $\sqrt{3} \approx 1,7\ldots$ Il y a donc unicité sans y avoir existence. Plus précisément, si un tel entier existait, il serait unique. De telles situations sont fréquentes en mathématiques : par exemple, on verra que pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il y a unicité de la limite. Cela ne veut pas dire que la limite existe : certaines suites n'ont en effet aucune limite, comme la suite de terme général $(-1)^n$. Par contre, pour toute suite, si la limite existe, alors elle est unique, ou encore il y a *au plus* une valeur qui sera sa limite (une suite ne peut pas admettre deux limites différentes).

2. On peut aussi raisonner par l'absurde en considérant x et x' distincts qui vérifient P, mais c'est plus lourd à rédiger.